Μάθημα 6ο 03/04/2020

Σημαντικά από την παράγραφο 2.1:

$\mathbb{C}$: Ένα σώμα που αντιστοιχεί στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$ από τον οποίο παίρνω πρόσθεση, εσωτερικό πολ/σμό (είναι πολ/σμός μεταξύ δυο μιγαδικών αριθμών), το οποίο είναι επέκταση του πολ/σμού στο $\mathbb{R}$, βαθμωτός πολ/σμός ο οποίος είναι ειδική περίπτωση του εσωτερικού πολλαπλασιασμού.

Προσοχή: • $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$

• $|z|=|x+iy|=\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}$: νόρμα του (x,y) ή απόλυτη τιμή του z

• $|\lambda z|=|\lambda|\cdot|z|$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $z\in\mathbb{C}$

ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ • $|z+w|\le|z|+|w|$, $z,w\in\mathbb{C}$

• $d(z,w)=|z-w|$, $z,w\in\mathbb{C}$

• $d(z,w)=|z-w|=0 \Leftrightarrow z=w \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}z=\operatorname{Re}w \\ \operatorname{Im}z=\operatorname{Im}w \end{cases}$

• $|z-w|\in\mathbb{R}$ και $|z-w|>0$.

• $|z-w|=|w-z|$

• $|z-w|\le|z-a|+|a-w|$

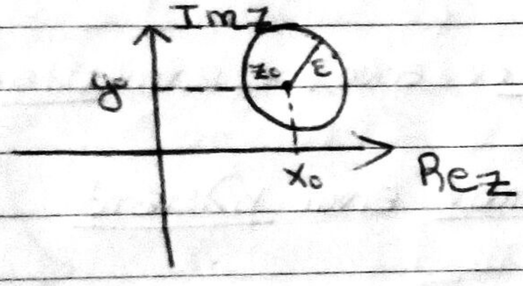
$\boxed{\text{ΒΑΣΙΚΟ}}$

Γενικά: • όλη η τοπολογία του $\mathbb{C}$ ταυτίζεται με την τοπολογία του $\mathbb{R}^2$. Οι τοπολογικές ιδιότητες του $\mathbb{C}$ είναι σαν να μιλάμε για τις τοπολογικές ιδιότητες του $\mathbb{R}^2$. Εδώ ασχολούμαστε με το $\mathbb{R}^2$ άρα θα μιλάμε για κυκλικούς δίσκους μόνο εδώ.

• Όλες οι έννοιες (ανοικτά - κλειστά, κλπ) είναι ίδιες με αυτές στον $\mathbb{R}^2$. Ειδικά ($\forall\, \varepsilon>0$):

$$\underbrace{D(z_0,\varepsilon)}_{\text{Ανοικτός κυκλικός δίσκος κέντρου } z_0\in\mathbb{C} \text{ και ακτίνας } \varepsilon>0}=\{z\in\mathbb{C} : |z-z_0|<\varepsilon\}$$

Σχήμα



• Το $D(z_0,\varepsilon)$ αντιστοιχεί στη $B((x_0,y_0),\varepsilon)\subseteq\mathbb{R}^2$ για $z_0=x_0+iy_0$, με $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

• Θα μιλάμε / ασχολούμαστε μόνο με τον $\mathbb{R}^2$ σε αντίθεση με τον ΑΠ ΙΙΙ που κάναμε γενικά την τοπολογία του $\mathbb{R}^n$.

• Όπου στις σημειώσεις του Γ. Γιαννάκη λέει σύγγραμμα [2] είναι οι σημειώσεις του ΑΠ.IV.

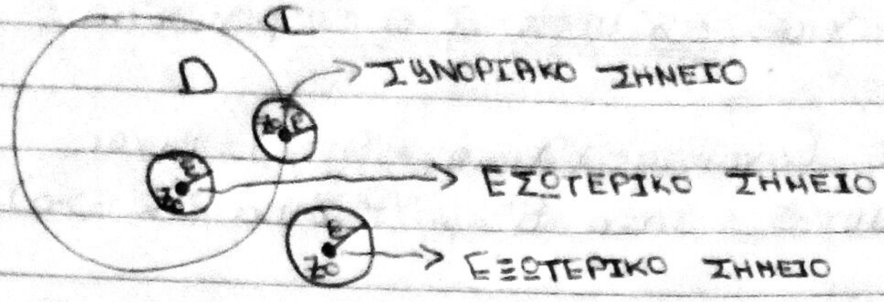
• Τα επόμενα είναι αυτά που ξέρουμε από το $\mathbb{R}^2$.

Ορισμός :

* Ένα σύνολο $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό $\Leftrightarrow$

$\forall z \in \mathbb{C} \;\; \exists \varepsilon > 0$ τω. $D(z,\varepsilon) \subseteq D$

Σχήμα :



* Ιδιότητες Ανοικτών Συνόλων - Κλειστών Συνόλων

- Ένωση $\boxed{\text{οσοδήποτε}}$ ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό.
- $\boxed{\text{Πεπερασμένη}}$ τομή ανοικτών είναι ανοικτό.
- $\boxed{\text{Πεπερασμένη}}$ ένωση κλειστών συνόλων είναι κλειστό
- Η τομή $\boxed{\text{οσοδήποτε}}$ κλειστών είναι κλειστό.

Ορισμοί

- $\bar{D}(z,r) = \{ w \in \mathbb{C} : |z-w| = r \}$: ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΔΙΣΚΟΣ
- Εσωτερικό σημείο z του $D \subseteq \mathbb{C}$: ολόκληρος ο δίσκος με κέντρο το σημείο z να είναι μέσα στο D.
- Εξωτερικό σημείο z του $D \subseteq \mathbb{C}$: ολόκληρος ο δίσκος με κέντρο το σημείο z να είναι στο συμπλήρωμα του D
- Συνοριακό σημείο z του $D \subseteq \mathbb{C}$: ούτε εσωτερικό ούτε εξωτερικό
- D° : σύνολο εσωτερικών σημείων του D

• extD: σύνολο εξωτερικών σημείων του D

• ∂D: σύνολο συνοριακών σημείων του D.

Πρόταση 2.1.3:

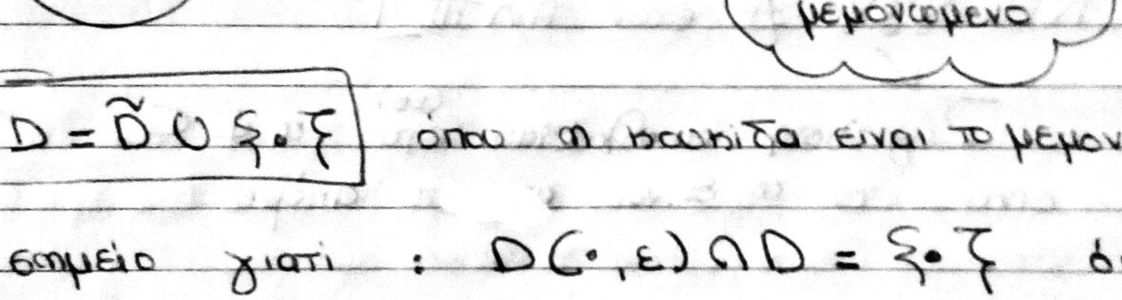
$$D^\circ = \bigcup_{A\subset D,\ A\subset\mathbb{C}\ \text{ανοικτό}} A$$

Ορισμοί:

$D \subset \mathbb{C}$. Ένα σημείο $z \in \mathbb{C}$ ονομάζεται:

• **Μεμονωμένο** σημείο του D, αν υπάρχει $\varepsilon>0$ έτσι ώστε: $D(z,\varepsilon) \cap D = \{z\}$ [σημείο μόνο του δεν έχει άλλα σημεία γύρω του]

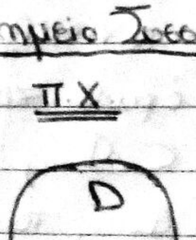
Π.χ (σχήμα)



$\boxed{D=\tilde{D} \cup \{\bullet\}}$ όπου η κουκίδα είναι το μεμονωμένο σημείο γιατί: $D(\bullet,\varepsilon) \cap D = \{\bullet\}$ όπου η κουκίδα είναι κάποιος μιγαδικός αριθμός z_0.

• Σημείο Συσσώρευσης του D αν $\exists \varepsilon>0$ τ.ω: $(D(z,\varepsilon)\setminus\{z\}) \cap D \neq \emptyset$

Π.Χ



$\{\bullet\}$ σημείο συσσώρευσης γτ. $(D(z,\varepsilon)\setminus\{\bullet\}) \cap D \neq \emptyset$.

όπου $\{\bullet\}$ συμβολίζει κάποιον μιγαδικό αριθμό z.

• Σημείο Επαφής του D, αν $z \in D$ ή αν z είναι σημείο συσσώρευσης του D

• D': σύνολο σημείων συσσώρευσης του D

§ 2.2. $\boxed{\text{ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ στο } \mathbb{C}}$
$\|$
$\boxed{\text{ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ στο } \mathbb{R}^2}$

* Σύγκλιση Ακολουθίας (in) στο $\mathbb{C}$

(α) σύγκλιση ακολουθίας (to) στο $z_0 \in \mathbb{C}$ [το z_0 είναι το σημείο που συγκλίνει, το όριο δηλαδή] =
= σύγκλιση ακολουθίας στο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
(ΟΠΩΣ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^2$ → ΑΛ.ΙΙΙ → ΓΝΩΣΤΟ)

(β) [ΝΕΟ ??? ∄ στον ΑΛ ΙΙΙ]
↙
Σύγκλιση ακολουθίας (to) στο $\infty \notin \mathbb{C}$
όπου το ∞ είναι άγνωστο ακόμα.

* Ξεκινάμε από το γνωστό:

Ορισμός
Μία ακολουθία στο $\mathbb{C}$, δηλαδή μία απεικόνιση $\mathbb{N} \ni m \mapsto z_m \in \mathbb{C}$ με μιγαδικούς όρους z_m, την οποία συμβολίζουμε $(z_m) = (z_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, ονομάζεται συγκλίνουσα, αν υπάρχει $z \in \mathbb{C}$, το οποίο όριο της (z_m), στο οποίο συγκλίνει η $(z_m) \subset \mathbb{C}$ συγκλίνει, συμβολικά $z_m \to z$, δηλαδή αν:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists m_0 \in \mathbb{N} \ \forall m \in \mathbb{N}, \text{ με } m \geq m_0 : \underbrace{|z_m - z|}_{\in \mathbb{R}} < \varepsilon}$$

Πρόταση 2.2.1

(α) Το όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας είναι μοναδικό και συμβολίζεται με $\lim_{n\to\infty} z_n$

SOS

(β) $\boxed{z_n \to z \iff z_n - z \to 0 \iff |z_n - z| \to 0}$.

όπου $|z_n - z|$ ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών όρων η οποία συγκλίνει στο μηδέν.

[ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Η σύγκλιση των ακολουθιών στο $\mathbb{C}$ είναι συμβατή με τη σύγκλιση ακολουθιών στο $\mathbb{R}$ γιατί αν πάρω $(x_n) \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ και $x_n \to x$

τότε ισχύει:

$$|x_n - x| = \|(x_n,0)-(x,0)\| = |(x_n+i0)-(x+i0)|$$

και από τους ορισμούς σύγκλισης ακολουθιών στο $\mathbb{R}$ και στο $\mathbb{C}$ έχουμε:

$$x_n \to x \in \mathbb{R} \iff x_n \to x \in \mathbb{C}$$]

SOS

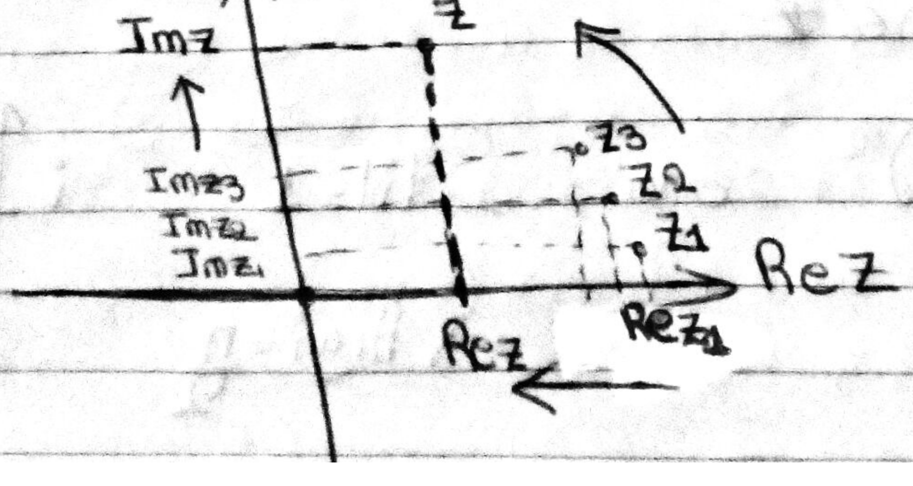
(γ) $z_n \to 0 \iff |z_n| \to 0$

(δ) $z_n \to z \Rightarrow |z_n| \to z$

SOS

(ε) $z_n \to z \iff \mathrm{Re}\, z_n \to \mathrm{Re}\, z$ και $\mathrm{Im}\, z_n \to z$

Σχήμα:



(ζ) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

(θ) Μία ακολουθία $(z_n) \subset \mathbb{C}$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ είναι ακολ. Cauchy

(η) Ισχύει (Bolzano-Weierstrass):

Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολ.

(ι) Αν $z_n \to z$, $w_n \to w$ τότε $\begin{cases} z_n + w_n \to z + w \\ z_n \cdot w_n \to z \cdot w \\ \dfrac{z_n}{w_n} \to \dfrac{z}{w} \ (w \neq 0) \end{cases}$

[Η απόδειξη από το (ι) είναι όπως στο $\mathbb{R}$ γιατί ο $\mathbb{C}$ με τον $\mathbb{R}^2$ μοιάζουν ως προς τις ιδιότητες γεωμετρικά και στο $\mathbb{C}$ κάνω πράξεις όπως στον $\mathbb{R}^2$]

Παράδειγμα 2.2.1

(α) Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολ. $(i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ $n\in\mathbb{Z}$

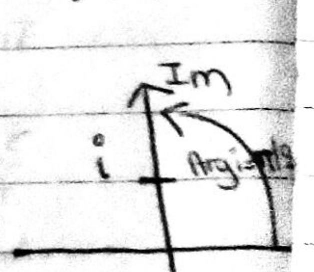
Λύση:

!!!

$(i^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, $\boxed{n\in\mathbb{Z}}$

① Τι συμβαίνει εδώ;;; Επειδή έχω δύναμη μιγαδικού αριθμού $\Rightarrow$ πολ/σμό μιγαδικών θα χρησιμοποιήσω την πολική μορφή του μιγαδικού αριθμού.

② Μπορώ να την δω ως συνάρτηση δύναμης ;;; ΟΧΙ, γιατί το $n\in\mathbb{Z}$



$i^n = (|i|\cdot e^{i\,\mathrm{Arg}\,i})^n$ όπου: $\begin{cases} |i| = 1 \\ \mathrm{Arg}\,i = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

$i^n = (e^{i\pi/2})^n$

$\boxed{i^n = e^{i n\pi/2}}$, $\dfrac{n\cdot\pi}{2} \in \mathbb{R}$

$i^n = e^{i n \pi/2}$

$i^n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ ①

- Για $n = 4k$ η ① θα είναι:

$i^n = \cos\left(\frac{4k\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{4k\pi}{2}\right)$

$i^n = \cos(2k\pi) + i \cdot \sin(2k\pi)$

$i^n = 1 + i\,0 \Rightarrow \boxed{i^n = 1}$

- Για $n = 4k+1$ η ① θα είναι

$i^n = \cos\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$

$i^n = 0 + i \cdot 1 \Rightarrow \boxed{i^n = i}$

- Για $n = 4k+2$ η ① θα είναι:

$i^n = \cos(2k\pi + \pi) + i \cdot \sin(2k\pi + \pi)$.

$i^n = -1 + 0 \cdot i \Rightarrow \boxed{i^n = -1}$

- Για $n = 4k+3$ η ① θα είναι:

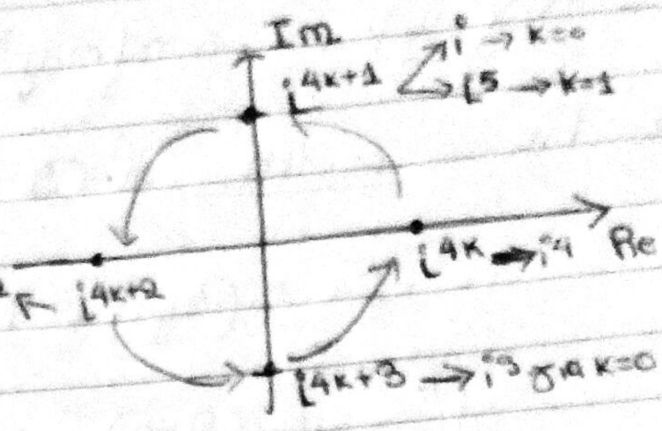
$i^n = \cos\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)$

$i^n = 0 + (-1) \cdot i \Rightarrow \boxed{i^n = -i}$

- Για $n = 4k+4$

$\boxed{i^n = 1} \Rightarrow$ περιοδικότητα. Συνεπώς :

Οι υπακολουθίες :



- $i^{4k+1} = i \xrightarrow[k\to\infty]{} i$
- $i^{4k+2} = -1 \xrightarrow[k\to\infty]{} -1$
- $i^{4k+3} = -i \xrightarrow[k\to\infty]{} -i$
- $i^{4k} = 1 \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$

Άρα η i^n δεν συγκλίνει, <u>Αφού</u> διαφορετικές υπακολουθίες συγκλίνουν (προς) (το) διαφορετικά όρια.

[βλέπε Πρόταση 2.2.1 (ΣΤ)]

(β) $\frac{i^n}{n} \to 0 \iff \left|\frac{i^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \to 0$.

sos

$\boxed{\text{Παράδειγμα}}$ (Έχει σχέση με θέμα που έχει μπει σε εξεταστική)

Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία:

$$z_n = e^{i2n\pi}$$

<u>Λύση</u>

[Για να βρούμε που συγκλίνει η ακολουθία (z_n) είτε βάζω τιμές στο "n" είτε βρίσκω το z_n].

$$z_n = e^{i2n\pi} = \cos(2n\pi) + i\cdot\sin(2n\pi)$$

$$z_n = 1 + i\cdot 0$$

<u>Προσοχή</u>:

Το "n" «πηγαίνει» στο $+\infty$ αλλά το $e^{i2n\pi} = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Επίσης θα μπορούσαμε να πάρε και:

$$e^{i2m\pi} = (e^{i\pi})^{2m} = (-1)^{2m} = 1$$

$$\Rightarrow e^{i2m\pi} = 1 \xrightarrow[m\to+\infty]{} 1 \quad \text{ΕΝΩ} \quad e^{2m\pi} \xrightarrow[m\to\infty]{} \infty.$$

Σημείωση:

- Η εκθετική όταν έχει φανταστικό εκθέτη είναι περιοδική συνάρτηση γιατί έχει μέσα και cos και sin.

- Η $e^x > 0$ για $x \in \mathbb{R}$.

- Η e^{-iy} είναι περιοδική όπως τώρα μάθαμε.

Παρατήρηση 2.2.1 (χωρίς απόδειξη)
Ιδιότητες σύγκλισης στο $\mathbb{R}$

① $a^m \to 0$, $a \in (-1,1)$

② $\sqrt[m]{a} \to 1$, $a > 0$

③ $\sqrt[m]{m} \to 1$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ SOS ΠΡΟΣΟΧΗ

(*) Από το $a^m \to 0$ προκύπτει: $\boxed{z^m \to 0 \text{ για } z \in D(0,1).}$

Απόδειξη

$z^m \to 0$, $\forall z \in D(0,1) \Leftrightarrow |z| < 1$.

Αφού $z^m \to 0 \Leftrightarrow |z^m| = |z|^m \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$ για $|z|<1$.
βλ. ορισμό
θ πρόταση.

όπου $|z|^m \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$ για $z<1$ [είναι γνωστό από Α.Λ.Ι.

ότι $a^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ για $a \in (-1,1)$.

(*) Και από (2), (3) προκύπτει:

$$\sqrt[n]{n} + i\sqrt[n]{2} \longrightarrow 1+i$$

Το βλέπω σαν διάνυσμα στο $\mathbb{R}^2$.

$$(\sqrt[n]{n}, \sqrt[n]{2}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (1,1).$$

<u>Σημείωση</u>

Σύγκλιση μιγαδικής ακολουθίας σε μιγαδικό αριθμό μπορώ να την κάνω όπως τη σύγκλιση του $\mathbb{R}^2$

Το π.χ. 2.2.2 θα το δούμε αργότερα, σε παρακάτω μαθήματα

→ Θα μιλήσουμε για έννοια ακολουθίας στο <u>άπειρο</u>

<u>Ερώτηση:</u>

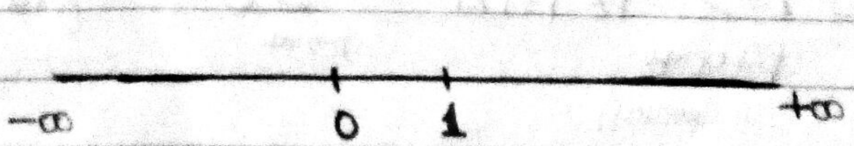
(1) $z_n \to z \overset{?}{\underset{?}{\Longrightarrow}} \sqrt[k]{z_n} \to \sqrt[k]{z}$

(2) Η συνάρτηση $\sqrt[k]{z_n}$ πότε είναι συνεχής, είναι συνεχής ???

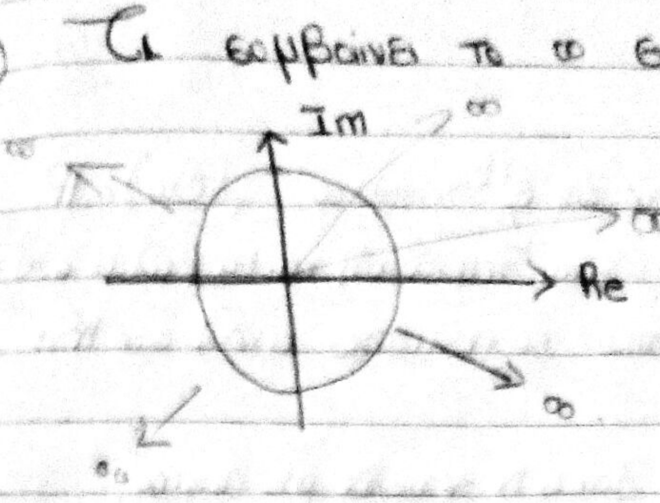
$\boxed{\text{Σύγκλιση στο } \infty}$

<u>"Το ∞ (άπειρο) στο $\mathbb{C}$"</u>

(1) Τι συμβαίνει το ∞ στο $\mathbb{R}$?



② Τι συμβαίνει το ∞ στο $\mathbb{C}$???



Δηλαδή θεωρούμε ότι στα "άκρα" του $\mathbb{C}$ (πολύ μακριά από το O, από όλες τις κατευθύνσεις) υπάρχει ένα σημείο το λεγόμενο ∞ (άπειρο)

ΣΧΟΛΙΟ

- Το άπειρο (∞) δεν είναι σημείο του $\mathbb{C}$ αλλά είναι ένα σημείο μόνο του.
- Το άπειρο σημαίνει απομάκρυνση από το O δηλαδή πόσο πολύ μεγαλώνει η απόλυτη τιμή του μιγαδικού

Εκτός από την έννοια της σύγκλισης σε ένα σημείο υπάρχει και η καινούργια έννοια σύγκλισης σε άπειρο το οποίο θεωρείται ως ένα επιπλέον σημείο το οποίο όμως δεν ανήκει στο μιγαδικό επίπεδο. (δηλαδή $\infty \notin \mathbb{C}$) αλλά επεκτείνει το $\mathbb{C}$ μαζί με τους υπόλοιπους μιγαδικούς αριθμούς στο:

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

Ορισμός:

$z_n \to \infty$ ή $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$ με $(z_n) \subset \mathbb{C}$ αν:

$$\boxed{\forall r>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ \text{με} \ n \geq n_0 : |z_n| > r}$$

Παρατήρηση 2.2.2:

(α) $z_n \to \infty \iff -z_n \to \infty \iff z_n \cdot e^{i\theta_n} \to \infty$, $(\theta_n) \subset \mathbb{R}$

είναι περιοδική και θα βάλω απόλυτες τιμές

(γ). Από τον ορισμό της σύγκλισης ακολ. στο $\mathbb{R}$:

$$x_n \to +\infty \iff \forall r>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ με } n \geq n_0 :$$
$$x_n > r \iff \frac{1}{x_n} \to 0 .$$

Άρα προκύπτει:

$$z_n \to \infty \iff |z_n| \to +\infty \iff \frac{1}{|z_n|} \to 0$$

για $(z_n) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$

SOS

Το μόνο που μετράει για τη σύγκλιση στο ∞ είναι αν απομακρύνομαι από το 0

Πράξεις με ∞: ($z \in \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$).

$$\infty \pm z = z \pm \infty = \infty$$
$$w \cdot \infty = \infty \cdot w = \infty \cdot \infty = \infty .$$
$$\frac{z}{\infty} = 0$$
$$\frac{\infty}{z} = \infty$$
$$\frac{w}{0} = \infty$$ ΠΡΟΣΟΧΗ ($w \neq 0$).

ΔΕΝ ΟΡΙΖΟΝΤΑΙ:

$$\infty \pm \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Π.Χ. 2.2.3.

(α). $\frac{1}{n} + i\sqrt{n} \to \infty \iff \left|\frac{1}{n} + i\sqrt{n}\right| = \frac{|1 + i n^{3/2}|}{n} = \frac{\sqrt{1+n^3}}{n}$

$= \frac{\sqrt{n^2(\frac{1}{n^2}+n)}}{n} = \sqrt{\frac{1}{n^2}+n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$

όπου η δεξιά πλευρά ισχύει αφού $\sqrt{\frac{1}{n^2}+n} \geq \sqrt{n} \to \infty$

$\iff \sqrt{\frac{1}{n}} \to 0$ [για $\frac{1}{n}$ ακολ. στο $\mathbb{R}$ η οποία είναι

συνεχής άρα $\frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{n}} \to 0$]

(γ). Από την 2.10 προκύπτει ότι:
$|z|>1 \Rightarrow z^n \to \infty$

$a^n \to 0,\ a\in(-1,1)$.
$\sqrt[n]{a} \to 1,\ a>0$. → Ακολ. πραγματικών αριθμών
$\sqrt[n]{n} \to 1$

Αφού:

$|z^n| = |z|^n \to \infty \iff \frac{1}{|z|^n} \to 0 \iff \left(\frac{1}{|z|}\right)^n \to 0$.

Άσκηση Α.32

$\boxed{|\mathrm{Re}\, z_n| \to \infty \text{ ή } |\mathrm{Im}\, z_n| \to \infty \Rightarrow z_n \to \infty \quad (2.17)}$

Ισχύει το αντίστροφο;

Λύση:

$|z_n| = \sqrt{|\mathrm{Re}\, z_n|^2 + |\mathrm{Im}\, z_n|^2} \geq |\mathrm{Re}\, z_n|, |\mathrm{Im}\, z_n|$

Αν $|\mathrm{Re}\, z_n|, |\mathrm{Im}\, z_n| \to \infty$ τότε και το αριστερό τείνει στο ∞

Το αντίστροφο δεν ισχύει, θα το δούμε στο επόμενο μάθημα